

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

- | | | | |
|------|--|---|---|
| i. | $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha} \text{ προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$ | Σ | Λ |
| ii. | Αν $ \vec{a} + \vec{\beta} ^2 = \vec{a} ^2 + \vec{\beta} ^2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$ | Σ | Λ |
| iii. | Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ | Σ | Λ |
| iv. | Η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 4$ παριστάνει κύκλο κέντρου $K(1, 5)$ και ακτίνας $\rho = 2$ | Σ | Λ |
| v. | Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{2}$ | Σ | Λ |

B. Έστω α, β, γ ακέραιοι, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

Να αποδείξετε ότι :

- | | |
|------|--|
| i. | Αν α / β και β / α τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ |
| ii. | Αν α / β και β / γ τότε α / γ |
| iii. | Αν α / β και α / γ τότε $\alpha / (\beta + \gamma)$ |

ΘΕΜΑ 2^ο

- Αν ο a είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{a^4 - 1}{16}$ είναι ακέραιος
- Αν ο ακέραιος αριθμός a δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $a^2 + 1$ με το 3
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ και $\beta / (4\alpha + 3)$ και $\beta / (5\alpha + 4)$ να δείξετε ότι $\beta = 1$

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία φ τα σημεία $M(2 + 3\sin\varphi, 3\eta\mu\varphi - 4)$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

B) Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους A και B
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία ορίζεται από τα κέντρα των δυο κύκλων
- Να αποδείξετε ότι $AB \perp \varepsilon$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται μια υπερβολή (C_1) και μια έλλειψη (C_2) με εξισώσεις $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και

$C_2: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ αντίστοιχα

- i. Αν η υπερβολή έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής αν η εκκενρότητα της είναι $e_1 = 2$
- ii. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ασύμπτωτών της
- iii. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία με εξίσωση $\varepsilon : 2x + 4y - 5 = 0$

Επιμέλεια

Καθηγητής Γιώργος Τσίγκλος