ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΗΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{o}:

Α1) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Α2) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σ ή Λ, ανάλογα με το αν είναι σωστές ή λανθασμένες.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\overline{z}|$

δ. $|z| = |\overline{z}|$

ε. $|i\overline{z}| = |z|$

Β1) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Β2) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu}, \nu \in N^*$. Να δείξετε ότι:

$$f(3) + f(13) + f(8) + f(18) = 0$$

ΘΕΜΑ 2^{o}:

Α) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = -3 + (2\alpha - \beta)i$, $w = \alpha - 5\beta - 3i$ Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι z, w να είναι συζυγείς.

Β) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi,\ \ x, y \in R$. Αν $w = \frac{z + 8i}{z + 6}$ και $\operatorname{Re}(w) = 0$, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος που περνά από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 3^{o}:

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in R$ και $w = 3z - i\overline{z} + 4$, όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.

Α) Να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$$
$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$$

Β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.