**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

## ΘΕΜΑ 1$^{O}$

Α. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

i. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
ii. Αν $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

Β.
i. Για τη συνάρτηση f ισχύουν : $f''(\chi) - f(\chi) = 0$ για κάθε $\chi \in \Re$ και $f(0) = f'(0)$ . Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $g(x) = [f(x)]^2 - [f'(\chi)]^2 + 2001$ είναι σταθερή .

β) $g(\chi) = 2001$ , για κάθε $\chi \in \Re$ .

ii. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .

α) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό , τότε $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$ .
Σ Λ

β) Αν $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Re$ , τότε τα σημεία Α(1 , 2) και Β(2 , -4) ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f .
Σ Λ

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$ , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ . Σ Λ

## ΘΕΜΑ 2$^{O}$

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)= \chi^5+ \chi^3+\chi + 1$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει αντίστροφη
2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα χ΄χ ακριβώς σε ένα σημείο

3. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \chi + \psi i$, $\chi,\psi$ πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία που εφάπτεται της γραφικής παραστασης της f στο σημείο (ο , f(ο)) έχει το ελάχιστο μέτρο

## ΘΕΜΑ $3^{O}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα

$[\alpha, \beta]$ με $\alpha > o$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$.

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + if(\alpha)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$

1. Αν ισχύει $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $\chi_1 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\chi_1) = 0$.
2. Εστω πραγματικοί αριθμοί Α,Β.με $A \neq B$ ώστε
   $Az_1z_2 + Bz_1z_2 = 100$

α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z_1z_2$ είναι πραγματικός

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(\chi_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

## ΘΕΜΑ $4^{O}$

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f , g τέτοιες ώστε να ισχύει :
$f(x) - g(x) = 2x-2$, για κάθε $\chi \in \Re$ ,
και έστω $C_f$ , $C_g$ οι γραφικές τους παραστάσεις .

Έστω ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ , έχει δύο λύσεις $\rho_1$ , $\rho_2$
με $\rho_1 < 1 < \rho_2$

1. Να αποδείξετε ότι :

   i. Η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(\rho_1 , \rho_2)$ .
   ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1 , \rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$

Επιμέλεια των θεμάτων Τσίκλος Γιώργος