

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $z_1 = \alpha + \beta i$ ,  $z_2 = \gamma + \delta i$  δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

**B.** Σε κάθε περίπτωση από τις παρακάτω να βάλετε σε κύκλο το γράμμα (Σ) αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα (Λ) αν ο ισχυρισμός είναι λάθος αιτιολογώντας την επιλογή σας .

**α)**  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$  Σ    Λ

**β)** Δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι ίσες αν υπάρχουν κάποια  $x \in R$  ώστε να ισχύει  $f(x) = g(x)$  Σ    Λ

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», οι συναρτήσεις  $g, h$  έχουν πεδίο ορισμού το  $R$  και ισχύει  $f(g(x)) = f(h(x))$  για κάθε  $x \in R$ , τότε οι συναρτήσεις  $g$  και  $h$  είναι ίσες. Σ    Λ

**δ)** Το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών είναι φανταστικός αριθμός. Σ    Λ

**ε)** Το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός. Σ    Λ

**στ)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ . Σ    Λ

**Γ.** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

**i.** Αν  $A = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$  τότε

**α)**  $A = \frac{1}{4}$

**β)**  $A = \frac{1}{8}$

**γ)**  $A = 0$

**δ)**  $A = -1$

**ε)** Τίποτα από τα παραπάνω

ii. Αν  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 \chi}{\chi^2}$  τότε

α)  $B = 1$

β)  $B = 0$

γ)  $B = -1$

δ)  $B = 1$

ε) Τίποτα από τα παραπάνω

iii. Αν  $\frac{\eta\mu\chi}{\chi} \leq f(x) \leq \sigma\upsilon\nu\chi$ ,  $\chi \neq 0$ , τότε  $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  είναι

α)  $A = 0$

β)  $A = -1$

γ)  $A = 1$

δ)  $A = \frac{1}{2}$

ε) Τίποτα από τα παραπάνω

Δ. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i. Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

ii. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται «1-1»;

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

i. Δείξτε ότι:  $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

ii. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

iii. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>:

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης  $f \circ g$  είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(f(x) + x^3 - x + 1) = g(f(x) + 2x - 1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** :

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x - 2)^2$  με  $x \geq 2$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.
- iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  και να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν τα ίδια κοινά σημεία με τον άξονα συμμετρίας τους