

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΗΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ)

Όνομα/Όνομα:

Ημερομηνία:

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα A , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

B. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

- i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε ισχύει:
 $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Σ Λ
- ii. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x για $x=0$ Σ Λ
- iii. Κάθε τοπικό μέγιστο της f είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο της f . Σ Λ
- iv. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ . Σ Λ

Γ. Να γράψετε τις παραγώγους των επόμενων συναρτήσεων:

- i. $f(x) + g(x)$
- ii. $f(x) \cdot g(x)$
- iii. $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$
- iv. $f(g(x))$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} .

Δ. Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα A . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

- i. Πότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$.
- ii. Πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$.

ΘΕΜΑ 2^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$.

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- iii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x=2$.

ΘΕΜΑ 3^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma \nu \chi + \eta \mu \chi$

- i. Να αποδείξετε ότι ισχύει : $f(x) + f''(x) = 0$
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$.
- iii. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $\lambda f'(\frac{\pi}{2}) - 2f(\frac{\pi}{2}) = 2$.

ΘΕΜΑ 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a^2 - 4a$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a μια πραγματική σταθερά.

- i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.
- ii. Αν $f(x_1) = 3f(x_2) + 50$, όπου x_1 η θέση τοπικού μεγίστου και x_2 η θέση τοπικού ελαχίστου, να αποδείξετε ότι $a=2$.
- iii. Για $a=2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στον άξονα $y'y$.
- iv. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος. Ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός μεταβολής;