

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = a^x - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $0 < a < 1$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε εάν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη, να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα και να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) > (\ln a - 1)x + 1$ .

γ) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2), \quad 0 < a < 1.$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-2, 1)$  και  $B(1, 7)$ .

α) Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι "1-1".

β) Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(-6 + f(x^2 - 8)) = -2$ .

γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της  $C_f$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι κάθετη στην ευθεία (ε):  $x + 2y - 3 = 0$ .

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>:**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2}.$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα.

γ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

στ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της  $f$ .

ζ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$x^3 + (1 - \lambda)x^2 + 3x - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$